MECÁNICA ESTADÍSTICA - 3

PROBLEMAS

(los problemas con * se entregan hasta el 15 octubre 2003)

1. Se coloca un sólido a la temperatura absoluta T en un campo magnético H=30000 gauss. El sólido contiene átomos paramagnéticos de espín 1/2 que interaccionan débilmente entre ellos.

a) Si el momento magnético es igual al magnetón de Bohr, por debajo de qué temperatura se debe enfriar el sólido para que más del 75% de los átomos se polaricen con sus espines paralelos al campo magnético externo?

b) Suponga que el sólido no tiene átomos paramagnéticos, sino muchos protones (por ejemplo, es el caso de la parafina). Cada protón tiene espín 1/2 y un momento magnético característico. ¿Cuál sería la temperatura de la parte a) en este caso?

2. Estudie el paramagnetismo, en equilibrio térmico, de una sal en la cual N iones paramagnéticos de espín j que tienen un momento magnético μ. En presencia de un campo magnético los niveles de energía son $-j\mu H, -(j-1)\mu H, \ldots\ldots, (j-1)\mu H, j\mu H$.

a) Calcule la función de partición, la energía y la magnetización media para cada ion. Grafique para diferentes valores de j (curvas de Brillouin).

b) Calcule la susceptibilidad magnética, muestre que la ley de Curie se satisface y calcule el coeficiente de Curie.

3. Antes del nacimiento de la mecánica cuántica, Langevin explicaba el paramagnetismo suponiendo que cada ion paramagnético poseía un momento magnético permanente dado por un vector clásico $\vec{\mu}$ libre de orientarse en todas las direcciones. La energía depende de la dirección relativa del momento magnético respecto del campo magnético ($E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$). La ley de probabilidad es, en equilibrio térmico, la distribución de Boltzmann $p(\hat{\mu})d^2\hat{\mu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\vec{\mu})} d^2\hat{\mu}$.

a) Calcule la función de partición Z, deduzca el valor medio de la energía, la magnetización y la susceptibilidad magnética longitudinal.

b) Compare estas magnitudes para la teoría cuántica de un paramagneto constituido por iones con espín j. Muestre que los resultados de se reducen al paramagnetismo clásico de Langevin para $\mu = \mu_B g(j+1/2)$ y $j \to \infty$, pero que la curva de saturación de Langevin no es correcta cuantitativamente.

4. Una banda de goma, en equilibrio térmico a una temperatura absoluta T, está sujeta por un extremo a un clavo y soporta por el otro extremo un peso W. Suponga (como modelo microscópico sencillo de una banda de goma) que está compuesta de una cadena de polímeros ligados de N segmentos unidimensionales unidos extremo

a extremo; cada segmento tiene una longitud a y puede orientarse paralela o perpendicularmente a la dirección vertical descendente. Encuentre una expresión para la longitud media resultante de la banda de goma como función de W, despreciando las energías cinéticas, los pesos de los segmentos o cualquier interacción entre ellos:
a) usando el ensemble microcanónico,
b) usando el ensemble canónico,
c) en ambos casos calcule la constante elástica.

5. * Considere un sistema compuesto por un número N grande de átomos distinguibles, distribuidos en lugares fijos y no interactuantes, cada uno de los cuales tiene dos niveles de energía no degenerados: 0, ε ($\varepsilon > 0$). Sea E/N la energía media por átomo en el límite $N \to \infty$.
a) ¿Cuál es el máximo valor posible de E/N para el sistema, se encuentre este o no en equilibrio termodinámico?
b) ¿Cuál es el máximo valor de E/N si el sistema está en equilibrio térmico, y a qué temperatura ocurre?
c) Para el sistema en equilibrio térmico, calcule la entropía por átomo S/N en función de E/N. Escriba una expresión aproximada en el caso $E/\varepsilon \infty 1$, $N - E/\varepsilon \infty 1$.

6. * Dos dipolos clásicos con momento dipolar μ_1 y μ_2 están separados una distancia R dada y la orientación de los respectivos vectores de momento magnético es libre. Están en equilibrio térmico a temperatura T. Calcule en el límite de altas temperaturas $\mu_1 \cdot \mu_2 /(kTR^3) = 1$.
   a) la función de partición clásica
   b) la energía media
   c) la fuerza media entre los dipolos.

   El potencial entre dos dipolos es $U(r) = \frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2}{r^3} - 3\frac{\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r}\, \vec{\mu}_1 \cdot \vec{r}}{r^5}$.

7. * Considere un gas clásico formado por partículas ultra relativistas (E=cp). Calcule la energía media, la ecuación de estado y el calor específico.

8. En un gas ideal de partículas clásicas de masa m en equilibrio térmico a temperatura T las partículas están sometidas a un potencial externo de la forma $U(x) = Ax^n$ siendo A, N >0; el gas está confinado en la región x>0.
a) Calcule la energía potencial media por partícula.
b) ¿Cuál es la energía potencial media por partícula de un gas en un campo gravitatorio constante?